حل نموذج بجروت

(806)-581

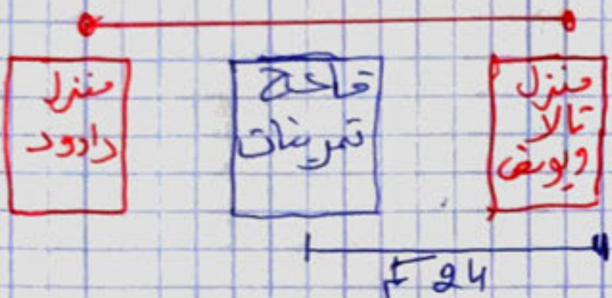
موعد مُتعذرين شتاء 2022

طاقم الرياضيات

معهد IQ

سؤال 1

نرسم وضع تقريبي للوضع الموصوف في السؤال:



بحسب المعطيات

- الساعة 6:00 خرجت تالا من المنزل باتجاه منزل داوود
- الساعة 7:00 خرج يوسف من المنزل باتجاه منزل داوود
- سرعة يوسف اكبر من سرعة تالا ب 5 كم/س.
- الساعة 7:30 خرج داوود من قاعة التمرينات باتجاه منزله.
- الساعة 8:00 ادركت تالا داوود. (بعد ساعتين من خروجها)
- الساعة 9:15 وصل يوسف وداوود لمنزل داوود اي بعد $2\frac{1}{4}$ ساعة من خروج يوسف وبعد $1\frac{3}{4}$ ساعة من خروج داوود من قاعة الرياضة

متى التقت تالا مع داوود:

	سرعة	زمن	المسافة
تالا	V_T	2	$2V_T$
داوود	V_D	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}V_D$

$\Leftarrow$ بما أن تالا التقت مع داوود بين قاعة الرياضة وبيت داوود لذلك يتحقق:

$$\boxed{(1)\quad 2V_T = \frac{1}{2}V_D + 24}$$

متى التقى يوسف وداوود في بيت داوود

	سرعة	زمن	مسافة
يوسف	V_T+5	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}(V_T+5)$
داوود	V_D	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}V_D$

$\Leftarrow$ مسافة يوسف = مسافة داوود + 24

$$(2)\quad 2\frac{1}{4}(V_T+5) = 1\frac{3}{4}V_D + 24$$

$$4/\ \frac{9}{4}(V_T+5) = \frac{7}{4}V_D + 24\ /4$$

$$9(V_T+5) = 7V_D + 96$$

$$9V_T + 45 = 7V_D + 96 \Longrightarrow \boxed{(2)\ 9V_T = 7V_D + 51}$$

إذا حصلنا على معادلتين بمتغيرين

(1) $2V_T=\frac{1}{2}V_D+24$

(2) $9V_T=7V_D+51$

$\Longrightarrow (2):(1) \Rightarrow \frac{9V_T}{2V_T}=\frac{7V_D+51}{0.5V_D+24}$

$\Rightarrow 4.5=\frac{7V_D+51}{0.5V_D+24} \Longrightarrow 2.25V_D+108=7V_D+51$

$\Rightarrow 57=4.75V_D \Rightarrow \frac{57}{4.75}=V_D \Rightarrow \boxed{12=V_D}$

إذا سرعة داوود 12 كم/س

نعوض في (1) $\Leftarrow 2V_T=\frac{1}{2}V_D+24 \Leftarrow 2V_T=\frac{1}{2}\cdot12+24$

$\Rightarrow 2V_T=30 \Longrightarrow \boxed{V_T=15} \Longrightarrow$ سرعة تالا 15 كم/س

وسرعة يوسف $15+5=20$ كم/س

للتلخيص:

سرعة داوود 12 كم/س
سرعة تالا 15 كم/س
سرعة يوسف 20 كم/س

ب- حتى وصل يوسف الى بيت داوود سار مدة 2.25 ساعة
وقطع مسافة $20\cdot2.25 \Leftarrow 45$ كم.
تقطع تالا مسافة 45 كم خلال $\frac{45}{15}=3$ ساعات
اي تصل الى بيت داوود الساعة 9:00
حتى الساعة 9:00 سار يوسف مدة 2 ساعات
وقطع مسافة $2\cdot20=40$ كم ⟸ اي يوسف على بعد 5 كم عن بيت داوود
اما داوود فكسار حتى الساعة 9:00 مدة $1\frac{1}{2}$ ساعة وقطع
خلالها مسافة $1\frac{1}{2}\cdot12=18$ كم اي ان داوود على
بعد $(21-18)$ ⟸ 3 كم عن بيته (البعد بين القاعة وبيت داوود 21 كم)
وبالتالي البعد بينهم هو $5-3 \Rightarrow \boxed{2}$ كم

سؤال 2

أ. A هي متوالية هندسية حدودها:
$a_1, \dots a_n$
وأساسها q وكل حدود المتوالية لا تساوي صفر

نبرهن ان المتوالية
$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \dots$
هندسية أيضًا, اي نبرهن ان:

$$\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} = \text{مقدار ثابت} \Rightarrow \frac{\frac{1}{a_1 q^n}}{\frac{1}{a_1 q^{n-1}}} = \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^{n-1}}{1} = \frac{1}{q}$$

اذًا المتوالية $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3} \dots \frac{1}{a_n}$
هندسية أساسها $\frac{1}{q}$

ب. S_n هو مجموع أول n حدود في المتوالية A لذلك

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} \Longrightarrow \frac{S_n}{a_1 a_n} = \cancel{a_1} \frac{q^n - 1}{q-1} \cdot \frac{1}{a_1^{\cancel{2}} q^{n-1}}$$

$$a_n \cdot a_1 = a_1 q^{n-1} \cdot a_1 = a_1^2 q^{n-1}$$

$$\Longrightarrow \frac{S_n}{a_1 \cdot a_n} = \boxed{\frac{q^n - 1}{a_1 (q-1)(q^{n-1})}} *$$

$$\underbrace{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \dots + \frac{1}{a_n}}_{\text{مجموع اول n حدود في المتوالية}} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{\left(\frac{1}{q^n}\right) - 1}{\frac{1}{q} - 1}$$

الهندسية التي حدها الأول $\frac{1}{a_1}$ وأساسها $\frac{1}{q}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{a_1} \cdot \frac{\frac{1 - q^n}{q^n}}{\frac{1-q}{q}} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1 - q^n}{\cancel{q^n}} \cdot \frac{\cancel{q}}{1-q}$$

$$= \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1 - q^n}{(1-q) q^{n-1}} = \boxed{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \cdot \frac{1}{q^{n-1}}} ** $$

اذًا $\boxed{** = *}$ وبالتالي يتحقق: $\frac{S_n}{a_1 \cdot a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots \frac{1}{a_n}$

وهو المطلوب

2.ب نعطي أننا مجموع أول n عدد في المتوالية A يُشكّل 6561 ضعف مجموع أول n عدد من المتوالية $\frac{1}{a_1} \cdots \frac{1}{a_n}$

ومعطى أن $a_1=1$ ، $q=3$.

بحسب البند ب ١ يتحقق

$$\underbrace{S_n}_{\text{مجموع n عدد المتوالية A}} = \underbrace{\frac{S_n}{a_1 \cdot a_n}}_{\text{مجموع أول n عدد من } \frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

$$\cancel{S_n} = \frac{\cancel{S_n}}{a_1 \cdot a_n} \cdot 6561$$

$$1 = \frac{6561}{a_1 \cdot a_n} \Rightarrow a_1 a_n = 6561$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 3^{n-1} = 6561 \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 3^n = 6561$$

$$\Rightarrow 3^n = 19683 \xrightarrow{\text{نُدخل ال ln}} \ln 3^n = \ln 1983$$

$$\Rightarrow n \ln 3 = \ln 19683 \Rightarrow n = \frac{\ln 19683}{\ln 3}$$

$$\boxed{n=9}$$

ج بحسب المعطيات المتواليه B تنبت من المتواليه A بواسطه قلب اشاره الحدود التي في الاماكن الزوجيه للمتواليه A اي أن :

$$b_1 = a_1 \; // \; b_2 = -a_2 \; // \; b_3 = a_3 \; // \; b_4 = -a_4$$

وبالتالي المتواليه B هي متواليه هندسيه منساويها $-q$ اي (-3) وحدها الاول $\boxed{b_1 = a_1 = 1}$

$$T_m = \frac{1\cdot((-q)^m - 1)}{-q-1} = \frac{(-1)^m(q^m) - 1}{-(q+1)} = \frac{\cancel{-}(q^m+1)}{\cancel{-}(q+1)}$$

$$T_m = \frac{q^m+1}{q+1} = \frac{3^m+1}{4}$$

$$b_1 \cdot b_m = \underset{1}{a_1} \cdot \underset{1}{a_1}(q^{m-1}) = 1\cdot(q)^m \cdot q^{-1} = 3^m \cdot 3^{-1} = 3^{m-1}$$

$$\frac{T_m}{b_1 \cdot b_m} = \frac{3^m+1}{4} \cdot \frac{1}{3^{m-1}} = \boxed{\frac{3^m+1}{4(3^{m-1})}} \; (*)$$

المجموع :

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4}$$

وهذا عبارة عن مجموع متواليه هندسيه حدها الاول $1 = \frac{1}{b_1}$ ومنساويها $\frac{1}{-q}$ وهو $-\frac{1}{3}$ $\Leftarrow \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \frac{1}{b_4}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{b_1}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{-q}\right)^m - 1}{\frac{1}{-q} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{-3}\right)^m - 1}{-\frac{1}{3} - 1} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^m - 1}{-\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{\frac{(-1)^m}{3^m} - 1}{-\frac{4}{3}} = \frac{\frac{-1-3^m}{3^m}}{-\frac{4}{3}} = \frac{\cancel{-}\frac{(1+3^m)}{3^{\cancel{m}}}}{\cancel{-}\left(\frac{4}{\cancel{3}}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1+3^m}{3^{m-1}}}{4} = \boxed{\frac{1+3^m}{4(3^{m-1})}} \; (**)$$

$\Rightarrow (**) = (*)$ اذاً : والمعادله المعطاه صحيحه

سؤال 3

بحسب المعطيات

* في الامتحان يوجد n أسئلة مختلفة.
* يختار كل ممتحن 3 بطاقات من بين ال n المكتوبة عليها الأسئلة (بدون إعادة) وعلى كل بطاقة سؤال مختلف ويجيب على الأسئلة.
* يقبل الممتحن للكلية اذا اجاب على سؤالين من بين الثلاثة بشكل صحيح.

* معلوم ان الاحتمال بأن ينجح نادر في الاجابه بشكل صحيح على سؤال واحد على الاقل من بين السؤالين اللذين في البطاقتين الاولتين هو $\frac{34}{69}$ ← وهذا معناه أن الاحتمال أن لا يجيب على اي سؤال بشكل صحيح من بين الاثنين هو $1-\frac{34}{69} \leftarrow \frac{35}{69}$

ومعطى ان نادر يستطيع الاجابة على 20 سؤال من بين n الاسئلة بشكل صحيح.

(أ) الاحتمال ان لا يجيب نادر بشكل صحيح على السؤال الاول هو $\frac{n-20}{n}$

والاحتمال ان لا يجيب نادر بشكل صحيح على السؤال الثاني هو $\frac{n-20-1}{n-1} \rightarrow \frac{n-21}{n-1}$

ويتحقق:

$$\frac{n-20}{n}\cdot\frac{n-21}{n-1}=\frac{35}{69}$$

$$\frac{n^2-20n-21n-420}{n^2-n}=\frac{35}{69} \Rightarrow \frac{n^2-41n-420}{n^2-n}=\frac{35}{69}$$

$$69n^2-2829n-28980=35n^2-35n \Rightarrow \Rightarrow 34n^2-2794n-28980=0$$

إذاً وصلنا على معادلة تربيعية

$$34n^2-2794n+28980=0$$

نحلها حسب الدستور ونحصل على:

$\boxed{n_1=70}$ $\quad n_2=\frac{207}{17}$

وبما أن n عدد طبيعي لذلك $\boxed{n=70}$

(n يعبر عن عدد الأسئلة)

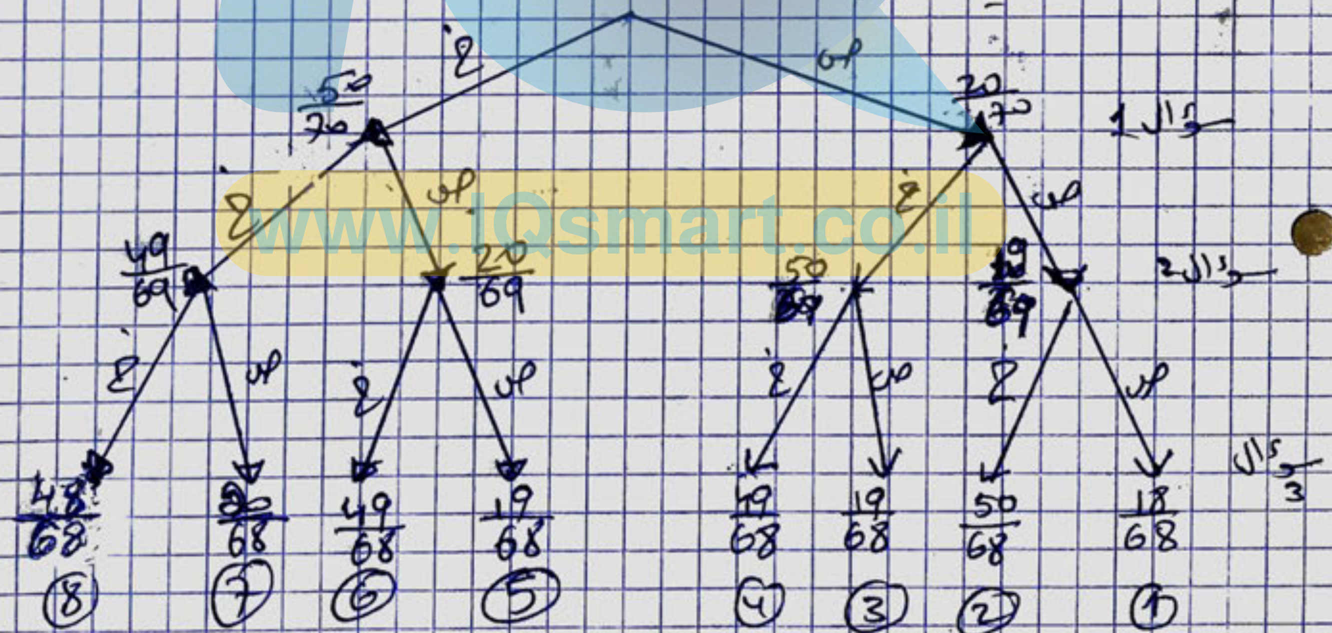
أي ان عدد أسئلة الامتحان هو $\boxed{70}$

2.ب

لكي يُقبل نادر للكلية عليه أن يجيب على سؤالين من بين ال 3 بشكل صحيح.

بما أن نادر يستطيع الإجابة على 20 من بين ال 70 بشكل صحيح لذلك لا يستطيع الإجابة على 50 من 70 بشكل صحيح.

نبني شجرة ملائمة لنادر:



$$P\left(\text{يقبل نادر للكلية}\right)=\underbrace{\frac{20}{70}\cdot\frac{19}{69}}_{(2+1)}+\underbrace{\frac{20}{70}\cdot\frac{50}{69}\cdot\frac{19}{68}}_{(3)}+\underbrace{\frac{50}{70}\cdot\frac{20}{69}\cdot\frac{19}{68}}_{(5)}=\boxed{\frac{76}{391}}$$

إذا أجاب على الأول والثاني بشكل صحيح فالسؤال الثالث غير مهم للقبول لأنه سيقبل في كل الأحوال.

ب

$$P\left(\text{أجاب خطأ على السؤال الأول} \,\middle|\, \text{نادر قُبل للكلية}\right) = \frac{P\left(\text{قُبل نادر للكلية} \cap \text{أجاب خطأ على السؤال الأول}\right)}{P\left(\text{قُبل نادر للكلية}\right)}$$

$$= \frac{\frac{50}{70} \cdot \frac{20}{69} \cdot \frac{19}{68}}{\frac{76}{391}} = \frac{25}{84}$$

ج

$$P\left(\text{أجاب رامي بشكل صحيح على 3 أسئلة}\right) = \frac{40}{70} \cdot \frac{39}{69} \cdot \frac{38}{68} = \frac{494}{2737}$$

$$P\left(\text{أجاب نادر بشكل صحيح على 3 أسئلة}\right) = \frac{20}{70} \cdot \frac{19}{69} \cdot \frac{18}{68} = \frac{57}{2737}$$

$$\underbrace{\frac{57}{2737} \cdot 2}_{\text{ضعف احتمال نادر ان يجيب على 3 أسئلة بشكل صحيح}} = \frac{114}{2737} < \underbrace{\frac{494}{2737}}_{\text{الاحتمال أن يجيب رامي بشكل صحيح على 3 أسئلة}}$$

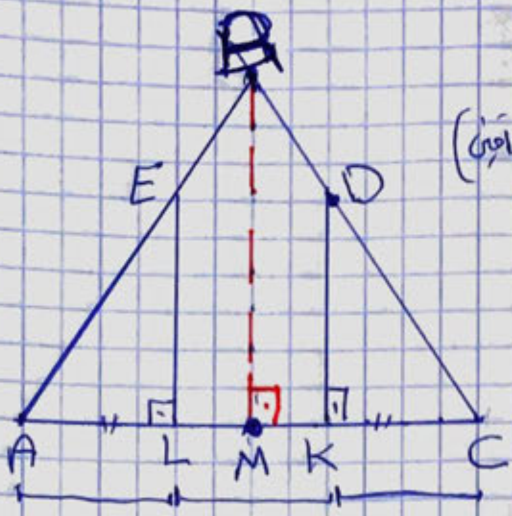
(أصغر)

أي ان الاحتمال ان يجيب رامي على 3 أسئلة بشكل صحيح أكبر من ضعف الاحتمال ان يجيب نادر على 3 أسئلة بشكل صحيح.

سؤال 4

بحسب المعطيات $BA=BC$ (متساوي الساقين)

$AL=LK=KC$



أ- نرسم الارتفاع BM

BM ينصف القاعدة وينصف زاوية ABC - بحسب النظرية

الارتفاع النازل على القاعدة في المثلث المتساوي الساقين ينصف القاعدة وينصف زاوية الرأس.

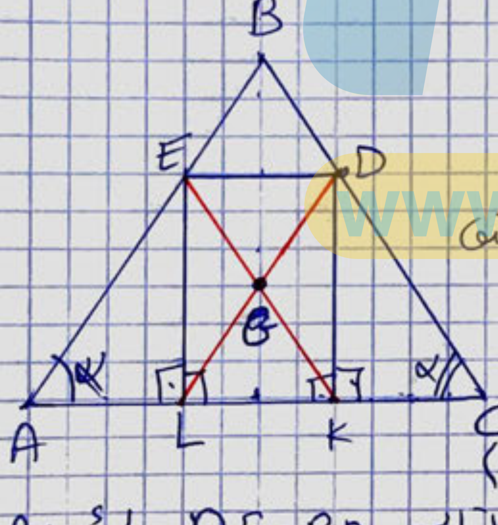
اذاً ينتج ان :. $BM \parallel EL \parallel DK$ و $MK=LM$

وبالتالي $MK=\frac{1}{2}KC$

بحسب نظرية طاليس يتحقق: $\frac{BD}{DC}=\frac{MK}{KC}$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{\frac{1}{2}\cancel{KC}}{\cancel{KC}} \Rightarrow \boxed{\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}}$$

وهو المطلوب (أ)



ب) $EDKL$ مستطيل

اقطار المستطيل متساوية وتنصف بعضها لذلك $GE=GD$.

$\Delta ELA \cong \Delta DKC$ حسب (ز، ض، ز)

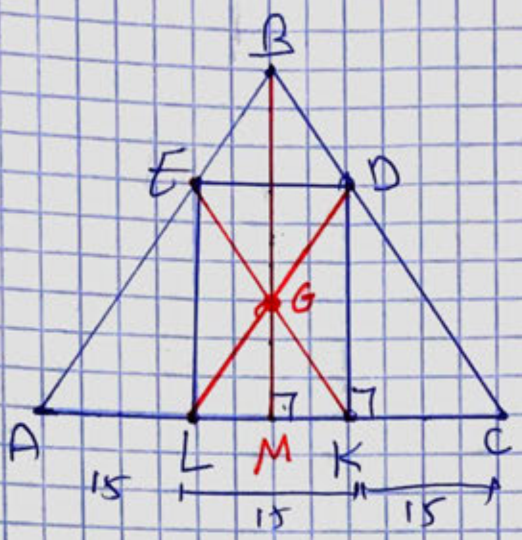
$(AL=KC,\ \measuredangle A=\measuredangle C=\alpha\ \ \measuredangle L=\measuredangle K=90)$

اذاً ينتج من التطابق $DC=AE$ وبالتالي $BE=BD$ لأن $AB=BC$

وبالتالي في الشكل الرباعي $BEGD$ يوجد زوجين من الاضلاع المتجاورة المتساوية $BE=BD,\ EG=DG$ والشكل دالتون

وهو المطلوب (ب)

ج



بحسب المعطى $AC = 45$

اذاً:

$$\boxed{AL = LK = KC = \frac{45}{3} = 15}$$

بما ان $ELKD$ مستطيل

اذاً $LK = ED = 15$

بحسب المعطى محيط المستطيل $ELKD$ هو 54 اذاً $DK + EL = 54 - 30$

$DK + EL = 24$

بما ان $DK = EL$ اذاً $DK = EL = \frac{24}{2} = 12$

اذاً:

$ED = LK = 15$ // $DK = EL = 12$

في $\triangle LDK$, GM قاعدة وسطى بحسب التعريف المستقيم الذي ينطلق من منتصف ضلع في مثلث ويوازي ضلع آخر في المثلث ينصف الضلع الثالث. أي ان G هي منتصف LD وبالتالي:

$$MG = \frac{1}{2} DK = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$$

$\triangle BMC \sim \triangle DKC$ حسب (ز.ز) $\measuredangle C$ مشتركة

$\measuredangle M = \measuredangle K = 90$ بحسب نسب التشابه يتحقق:

$$\frac{BM}{DK} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{BM}{12} = \frac{1.5}{1}$$

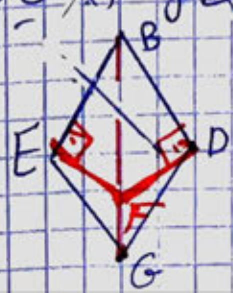
حسب (أ)

$$\Rightarrow BM = 12 \cdot 1.5 = 18$$

$$BG = BM - GM = 18 - 6 = 12$$

$$\boxed{BG = 12}$$

د نبحث عن نقطة F تقع على BG بحيث تجعل الشكل الرباعي $BDFE$ قابل للحصر داخل دائرة اي مجموع كل زاويتين $180°$.

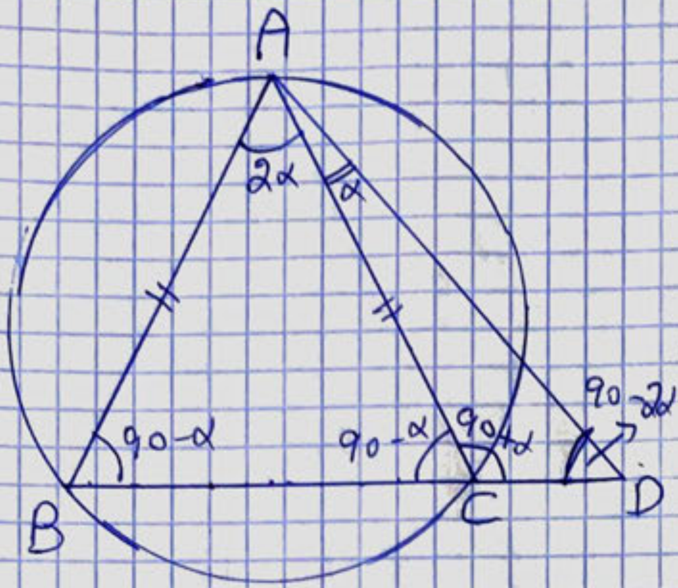


نختار F بحيث تتحقق $FD \perp BC$ و $FE \perp BA$

وعندها سينتج أن $\measuredangle EBD + \measuredangle EFD = 180°$ ايضاً

اي يوجد F تحقق الشرط.

سؤال 5



بحسب المعطيات:

$\angle CAD = 2\alpha$

$AB = AC$

اذاً:

$\angle ABC = \angle ACB = \frac{180-2\alpha}{2}$

$\angle ABC = \angle ACB = 90-\alpha$

ومعطى أن $\angle CAD = \alpha$

$\angle ACD = 180-(90-\alpha)$ مكملة $\angle ACB$

$\angle ACD = 90+\alpha$ مكملة لـ $\angle ACB$

$\angle ADC = 180-(90+\alpha)-\alpha$ مجموع زوايا المثلث $180°$

$\angle ADC = 90-2\alpha$

في المثلث ACD: نفرض أن نصف قطر الدائرة الخاصرة هو r اذاً:

$$\frac{AC}{\sin(90-2\alpha)} = 2r$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{\cos 2\alpha} = 2r \Rightarrow \boxed{\frac{AC}{2\cos 2\alpha} = r}$$

في المثلث ABD:

نفرض أن نصف قطر الدائرة الخاصرة هو r_1

إذاً:

$$\frac{AB}{\sin(90-2\alpha)} = 2r_1 \Rightarrow \frac{AB}{\cos 2\alpha} = 2r_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{AB}{2\cos 2\alpha} = r_1}$$

بما أن $AB=AC$ اذاً ينتج ان $r_1 = r$ وهو المطلوب

ب

$$S_{\Delta ACD} = \frac{AC \cdot AD}{2} \cdot \sin\alpha$$

في المثلث ABC نستعمل:

$$\frac{AC}{\sin(90-\alpha)} = 2R \Rightarrow AC = 2R \cdot \cos\alpha$$

في المثلث ACD نستعمل

$$\frac{AC}{\sin(90-2\alpha)} = \frac{AD}{\sin(90+\alpha)} \qquad (\sin(90+\alpha) = \cos\alpha)$$

$$\frac{AC}{\cos 2\alpha} = \frac{AD}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{\overset{AC}{2R\cdot\cos\alpha}}{\cos 2\alpha} = \frac{AD}{\cos\alpha}$$

$$\boxed{AD = \frac{2R\cdot\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}}$$

إذاً:

$$S_{\Delta ACD} = \frac{2R\cos\alpha}{2} \cdot \frac{2R\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \sin\alpha$$

$$\boxed{S_{\Delta ACD} = \frac{2R^2 \cdot \cos^3\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos 2\alpha}}$$

1.P معطى أنّ:

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABC}} = m$$

نجد $S_{\Delta ABC}$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(AC)(AB)\sin 2\alpha}{2} = \frac{AC^2 \cdot \sin 2\alpha}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(2R\cos\alpha)^2 \cdot \sin 2\alpha}{2} = \boxed{\frac{4R^2\cos^2\alpha \cdot \sin 2\alpha}{2}}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = 2R^2\cos^2\alpha \cdot \sin 2\alpha}$$

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{\cancel{2R^2} \cdot \cos^{\cancel{3}}\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos 2\alpha}}{\cancel{2R^2} \cdot \cancel{\cos^2\alpha} \cdot \sin 2\alpha} = \frac{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha}$$

$$= \frac{\cancel{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}}{\cos 2\alpha} \cdot \frac{1}{2\cancel{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}} = \frac{1}{2\cos 2\alpha}$$

$$\frac{S_{\triangle ABCD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2\cos 2\alpha} = \overbrace{\frac{1}{2}}^{m}$$ إذا يتحقق

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

وهذا غير ممكن لأن α زاوية شكل $0 < \alpha < 180$

$\boxed{2.B}$ $m = 0.6 \Rightarrow 2/\ \frac{1}{2\cos 2\alpha} = 0.6\ /2$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos 2\alpha} = 1.2 \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{1.2} = 0.8333$$

$$\cos 2\alpha = 0.833 \Rightarrow 2\alpha = 33.557$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{33.557}{2} = 16.778$$

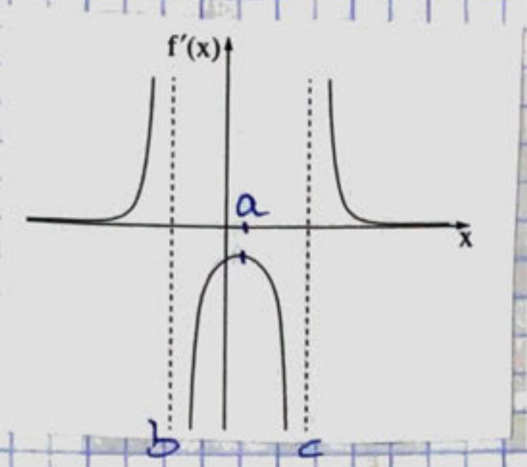
إذا:

$$\boxed{\measuredangle BAC = 2\alpha = 33.55}$$

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 90 - \alpha = 90 - 16.778$$

$$\boxed{\measuredangle ABC = \measuredangle AB = 73.222}$$

سؤال 6



بحسب المعطى :-

الدالة $f(x)$ معرفة في المجال

$x<b$, $b<x<c$, $c<x$

وقابلة للاشتقاق في كل نقطة

في مجال تعريفها.

ومن رسم المشتقة نستنتج

ان خطوط التقارب العمودية للمشتقة هي $x=b$ و $x=c$

ومعطى أن خط تقارب الأفقي بحسب الرسم هو $y=c$

وان النقطة القصوى للمشتقة هي في $x=a$.

(أ.1) مجال تصاعد الدالة هو الذي يحقق $0<f'(x)$

اي $x>c$ أو $x<b$ ($b<c$).

مجال تنازل الدالة هو الذي يحقق $f'(x)<0$

أي $b<x<c$

(ب) مجال تقعر الدالة للأعلى هو المجال الذي يحقق أن $0<f''(x)$ أي المجال الذي فيه $f'(x)$ تصاعدية

وبحسب الرسم المجال الذي فيه $f'(x)$ تصاعدية

هو :-

مجال تقعر الدالة للاعلى $b<x<a$ أو $x<b$

مجال تقعر الدالة للاسفل هو المجال الذي تحقق $f''(x)<0$

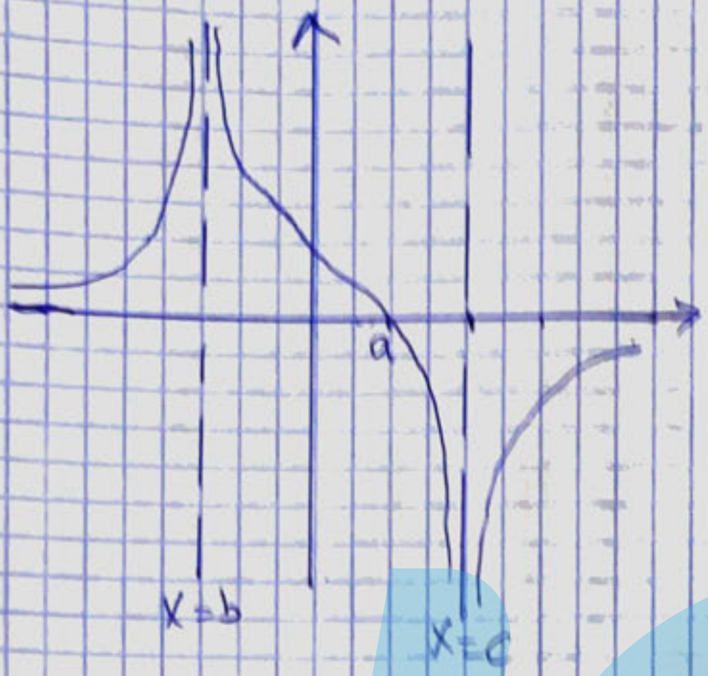
اي المجال الذي فيه $f'(x)$ تنازلية

وبحسب الرسم لـ $f'(x)$:-

مجال تقعر الدالة للاسفل هو:

$a<x<c$ او $x>c$

ج- الدالة $f(x)$ تمر بـ $(a,0)$



أ. $f'(x)=\frac{18-36x}{(x^2-x-6)^2}$

$(a,0)$ نقطة صفرية للدالة لذلك يتحقق $18-36x=0$

$\to 36x=18 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}} \Rightarrow (\frac{1}{2},0)$

الدالة غير معرفة في النقاط المصفرة للمقام:

$x^2-x-6=0$

نحسب المستويات $x_1=3$ $x_2=-2$

$\boxed{b=-2}$ $\boxed{c=3}$

د.1 في المجال $b<x<c$ أي $-2<x<3$ يتحقق أن $f'(x)<0$ حسب الرسم

وبما أن $f^2(x)\geq 0$ دائمًا لذلك $\underset{-\ \cdot\ +}{f'(x)\cdot f^2(x)}\leq 0$ (وهو المطلوب)

د.2 في المجال $0\leq x\leq 2a$ أي $0\leq x\leq 1$ $f'\cdot f\leq 0$

لذلك المساحة المطلوبة عبارة عن:

$$S=\left|\int_0^1 f'(x)\cdot f^2(x)\,dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{f^3(x)}{3}\right]_0^1\right| = \left|\frac{f^3(1)}{3}-\frac{f^3(0)}{3}\right| = \left[\left|\frac{18-36\cdot 1}{(1^2-1-6)^2}\right|^3-\left|\frac{18-36\cdot 0}{(0-0-6)^2}\right|^3\right]\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left|-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{12}}$$

سؤال 7

$f(x) = \tan x + \frac{1}{x}$ $\quad 0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$

$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{x}$

أ.1 مجال تعريف الدالة:

$\cos x \neq 0 \quad , \quad x \neq 0$

$x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

اذاً مجال تعريف الدالة: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ $\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

أ.2 خطوط التقارب

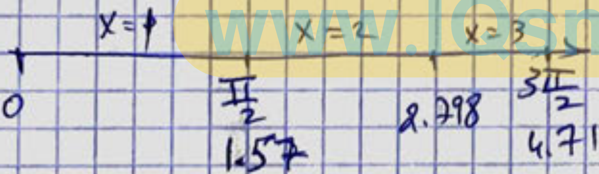
$\boxed{x = 0}$ $\quad \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$ $\quad \boxed{x = \frac{3\pi}{2}}$

ب. بحسب المعطى للدالة $f(x)$ يوجد نقطة صفرية في $x = 2.798$

وبما أن $\frac{\pi}{2} = \frac{3.14}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{2} = 1.57}$ اذاً $x = 2.798$

موجودة في الجزء $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

نفحص اشارة الدالة في اجزاء مجال التعريف



$f(1) = tg(1rad) + \frac{1}{1} > 0$

$f(2rad) = tg(2rad) + \frac{1}{2} < 0$

$f(3rad) = tg(3rad) + \frac{1}{3} > 0$

$\Longrightarrow$ مجال موجب

$0 < x < \frac{\pi}{2}, \ 2.798 < x < \frac{3\pi}{2}$

مجال سالب

$\frac{\pi}{2} < x < 2.798$

ح.

$$g(x) = \frac{\cos x}{x}$$

$$g(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} = \frac{\cos x}{-x} = -\frac{\cos x}{x} = -g(x)$$

اذاً:

$$g(-x) = -g(x)$$

والدالة $g(x)$ فردية.

ى. 1.

نجد أي x يتحقق $g'(x)=0$

$$g(x) = \frac{\cos x}{x}$$

$$g'(x) = \frac{-\sin x \cdot (x) - 1 \cos x}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{-x \cdot \sin x - \cos x}{x^2} = 0$$

$$-x \cdot \sin x - \cos x = 0$$

نقسم المعادلة على $-x \cdot \cos x$ نحصل على:

$$\frac{-x \sin x}{-x \cos x} - \frac{\cos x}{-x \cdot \cos x} = 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{x} = 0 \Longrightarrow \boxed{tg\,x + \frac{1}{x} = 0}$$

$$\boxed{tg\,x = -\frac{1}{x}}$$

انتبه الى انه يمكننا أن نقسم على $x \cdot \cos x$ لأن مجال تعريف الدالة g هو $x \neq 0$ وكذلك $\cos x = 0$ في $x = \frac{\pi}{2}$ وهو خارج مجال التعريف بالدالة f

اذاً النقطة القصوى للدالة g، الاحداثي x لها تحقق المعادلة $tg\,x = -\frac{1}{x}$

وكذلك النقطة الصفرية للدالة

$$f(x) = tg\,x - \frac{1}{x} = 0 \Longrightarrow \boxed{tg\,x = \frac{1}{x}}$$

تحقق نفس الشرط.

والحل لهاتين المعادلتين هو $\boxed{x = 2.798}$ حسب المعطى

نفحص نوع النقطة القصوى للدالة $g(x)$ نعوض

اشارة المشتقة الثانية $g''(x)$ في $x=2.798$.

بما ان المقام x^2 دائماً موجب في $g'(x)$ لذلك

اشارة المشتقة الثانية في $x=2.798$ هي اشارة

مشتقة البسط في $g'(x)$

$(\text{البسط})\ g'(x) = -x\sin x - \cos x$

البسط $g''(x) = -1\cdot\cancel{\sin x} + (-x)\cdot\cos x - \cancel{(-\sin x)}$

البسط $g''(x) = -x\cos x$

نقطة الشك لنقطة قصوى هي $x=2.798$

البسط $g''(2.798) = \underbrace{-2.798}_{-}\cdot\underbrace{\cos(2.798)}_{-} = +$

لذلك $g''(2.798) > 0$ اي ان $x=2.798$ min

اذاً النقطة الصفرية للدالة $f(x)$ هي $x=2.798$

وهي نهاية صغرى لـ $g(x)$.

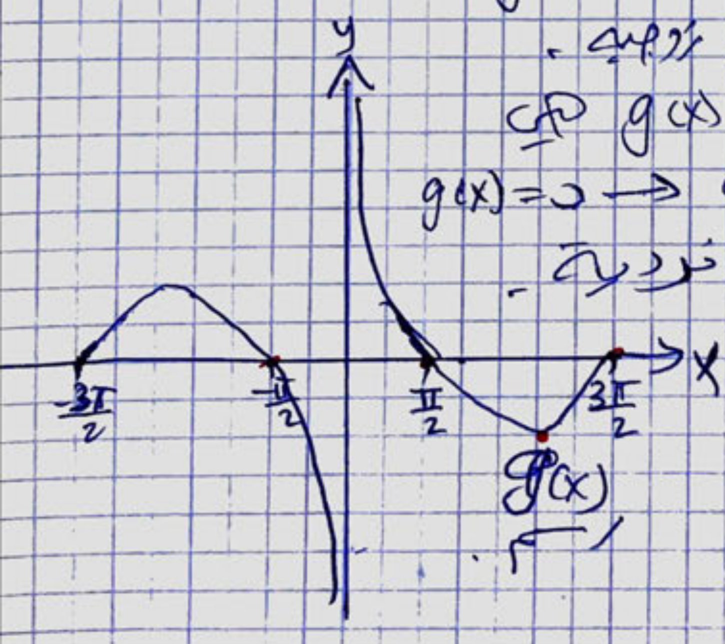
ط.2 $x=0$ هو خط تقارب للدالة $g(x)$

والدالة $g(x)$ هي دالة زوجية.

النقاط الصفرية للدالة $g(x)$ هي

$g(x)=0 \rightarrow \cos x=0 \Longrightarrow x=\frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2}$

وايضاً $x=-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$ لأن الدالة فردية.



$g(2.798) = \frac{\cos(2.798)}{2.798} = -0.337$

$\Downarrow$

$g(-2.798)_{max} = 0.337$

سؤال 8

أ. طول ضلع المثلث X إذاً محيط المثلث $3X$

مجال تعريف X هو $0<3X<K \Leftarrow \boxed{0<X<\frac{K}{3}}$

ب. محيط الدائرة $2\pi R$ ويتحقق :-

$$2\pi R = K-3X \Rightarrow R = \frac{K-3X}{2\pi}$$

إذاً نصف قطر الدائرة هو $R=\frac{K-3X}{2\pi}$

مساحة الدائرة هي πR^2 وتحقق :-

$$\pi\left(\frac{K-3X}{2\pi}\right)^2 = \pi\cdot\frac{(K^2-6KX+9X^2)}{4\pi^2} = \frac{K^2-6KX+9X^2}{4\pi}$$

مساحة المثلث هي :-

$$\frac{1}{2}X\cdot X\cdot\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{4}X^2$$

إذاً الدالة التي تعبر عن مجموع المساحتين هي :-

دالة الهدف $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}X^2+\frac{K^2-6KX+9X^2}{4\pi}$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2X+\frac{1}{4\pi}(-6K+18X)$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}X+\frac{18X}{4\pi}-\frac{6K}{4\pi}=X\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{18}{4\pi}\right)-\frac{6K}{4\pi}=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{2\sqrt{3}\pi+18}{\cancel{4\pi}}\right)X=\frac{+6K}{\cancel{4\pi}}$$

$$X=\frac{6K}{2\sqrt{3}\pi+18} \Rightarrow X=\frac{3K}{\sqrt{3}\pi+9} \Rightarrow X=\frac{3}{\sqrt{3}\pi+9}\cdot K$$

$$\boxed{X=0.21K}$$

نفحص ان $X=0.21K$ هي نقطة نهاية صغرى للدالة بواسطة $f''(x)$

$$f'(x) = x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{18}{4\pi}\right)-\frac{6K}{4\pi}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{18}{4\pi} > 0$$

اذاً $X=0.21K$ مين ماكس.

جـ- عندما يكون $X=0.21K$ اذاً محيط المثلث هو $0.63K$

وبذها محيط الدائرة هو $(K-0.63K)=0.37K$

ويتحقق:

$$2\pi R = 0.37K$$

$$R = \frac{0.37K}{6.28} = 0.0589K$$

$$\pi R^2 = \pi(0.0589K)^2 = 0.0108K^2$$

ومساحة المثلث هي $\frac{\sqrt{3}}{4}(0.21K)^2 \Leftarrow 0.433K^2$

وبما ان مساحة المثلث اكبر من مساحة الدائرة اذاً لا يمكن

حصر المثلث داخل الدائرة.